

2.2.25 Zlomkověda

Předpoklady: 020222

Př. 1: Napiš zlomky jako desetinné číslo.

a) $\frac{7}{5}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{11}{20}$

d) $\frac{5}{12}$

a) $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{14}{10} = 1,4$

b) $\frac{5}{6}$: nejde rozšířit, ve jmenovateli je $6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow$ dělíme $\begin{array}{r} 5:6=0,83... \\ 50 \\ 20 \\ 2 \end{array} \Rightarrow \frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$

c) $\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{55}{100} = 0,55$

d) $\frac{5}{12}$: nejde rozšířit, ve jmenovateli je $12 = 4 \cdot 3 \Rightarrow$ dělíme $\begin{array}{r} 5:12=0,416... \\ 50 \\ 20 \\ 80 \\ 8 \end{array} \Rightarrow \frac{5}{12} = 0,41\bar{6}$

Př. 2: Zapiš desetinná čísla jako zlomky v základním tvaru. U zlomků, které má smysl psát jako smíšené číslo, zapiš i tvar smíšeného čísla.

a) 0,8

b) 1,4

c) 0,08

d) 2,25

a) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b) $1,4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

c) $0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$

d) $2,25 = 2 + \frac{25}{100} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Př. 3: Jirka se rozhodl vědecky prozkoumat zlomky. Napsal si zlomek $\frac{p}{q}$, ve kterém byl čitatel i jmenovatel nahrazen písmenem. "Obě písmena mají význam žolíku, na jejich místo můžu dosazovat jakákoliv čísla.", vysvětluje.
Je pravda, že místo obou písmen může dosazovat libovolná čísla? Co se bude dít z velikostí zlomku, když bude za písmeno p dosazovat čím dál větší čísla? Co se bude dít s hodnotou zlomku, když bude čím dál větší čísla dosazovat místo písmene q ?

Do zlomku $\frac{p}{q}$ můžeme dosadit:

- libovolné číslo za písmeno p ,
- libovolné číslo různé od nuly za písmeno q (nesmíme dělit nulou).

$\Rightarrow$ píšeme jako podmínku $q \neq 0$.

Když budeme za písmeno p dosazovat čím dál větší čísla: $\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \dots$, bude se hodnota

zlomku $\frac{p}{q}$ zvětšovat (budeme mít čím dál větší počet stejných kousků).

Když budeme za písmeno q dosazovat čím dál větší čísla: $\frac{2}{5}; \frac{2}{6}; \frac{2}{7}; \dots$, bude se hodnota

zlomku $\frac{p}{q}$ zmenšovat (budeme mít stejný počet čím dál menších kousků).

Zapisování pravidel pomocí písmen je v učebnicích běžné (používá se dokonce i v učebnicích pro základní školy). Pravidla zapsaná pomocí písmenek přináší velmi úsporný a přehledný zápis, bohužel pouze pro toho, kdo si pod písmenky dokáže něco konkrétního představit.

Proto budeme postupovat obráceně - nejdříve zkusíme pomocí písmenek zapsat pravidla, která známe a která si představit určitě umíme.

Stačí nám jedno základní pravidlo: Písmenka ve vzorečkách zastupují čísla $\Rightarrow$ pokud nevíme, jak dál s písmenky, napíšeme si místo nich čísla, provedeme úkol s čísly a výsledek nám ukáže, co máme udělat s písmenky.

Př. 4: Pepa se rozhodl, že Jirku ve vědeckosti troufne a začal všechno zapisovat pomocí písmenek. Doplň pravidla (nezapomeň na podmínky):

a) $r \cdot \frac{p}{q} =$

b) $\frac{p}{q} : x =$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} =$

d) $\frac{e}{f} : \frac{g}{h} =$

a) $r \cdot \frac{p}{q}$

Zkoušíme na číslech: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5}$.

$r \cdot \frac{p}{q} = \frac{rp}{q}, q \neq 0.$

b) $\frac{p}{q} : x$

Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5 \cdot 3}.$

$\frac{p}{q} : x = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{x} = \frac{p}{qx}$

$q \neq 0, x \neq 0.$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}.$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$b \neq 0, d \neq 0.$

d) $\frac{e}{f} : \frac{g}{h}$

Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3}.$

$\frac{e}{f} : \frac{g}{h} = \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{g} = \frac{eh}{fg}, f \neq 0, g \neq 0, h \neq 0.$

Pedagogická poznámka: K mému překvapení vymyšlení písmenkových vzorců žáky docela bavilo. Někteří pomoc čísel nepotřebovali, těm ostatním stačila ukázka bodu a) a zbytek dokázali sestavit sami. Téměř všichni pak správně napsali i podmínku v bodu d).

Pedagogická poznámka: Největším oříškem je následující příklad. Opět si po chvíli ukazujeme bod a), zejména je potřeba upozornit, že součin $2 \cdot 3$ nesmíme vyčíslit (a pak se zeptat proč). Stejně tak kladu po dokončení otázku, jaký význam má číslo q , kterým je vynásobené číslo r (převedení na společného jmenovatele).

Př. 5: Ani Honza nechtěl zůstat pozadu. A ihned se vytasil se sadou pravidel pro sčítání a odčítání (pravidla pro násobení a dělení jsou totiž příliš jednoduchá). Dopln pravidla a nezapomeň na podmínky.

$$\text{a) } \frac{p}{q} + r \qquad \text{b) } x - \frac{y}{z} \qquad \text{c) } \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \qquad \text{d) } \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$$

a) $\frac{p}{q} + r$ Zkoušíme na číslech: $\frac{2}{5} + 3 = \frac{2}{5} + \frac{3}{1} = \frac{2}{5} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 5} = \frac{2 + 3 \cdot 5}{5}$.

$$\frac{p}{q} + r = \frac{p}{q} + \frac{rq}{q} = \frac{p + rq}{q}, \quad q \neq 0$$

b) $x - \frac{y}{z}$ Zkoušíme na číslech: $3 - \frac{2}{5} = \frac{3}{1} - \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 5} - \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 2}{5}$.

$$x - \frac{y}{z} = \frac{xz}{z} - \frac{y}{z} = \frac{xz - y}{z}, \quad z \neq 0$$

c) $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ Zkoušíme na číslech: $\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{5 \cdot 7}$.

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{rq}{sq} = \frac{ps + qr}{sq}, \quad q \neq 0, \quad s \neq 0$$

d) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ Zkoušíme na číslech: $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 7}{5 \cdot 7}$.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db} = \frac{ad - cb}{db}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0$$

Př. 6: Dopln zápis tak, aby pomocí písmen zachycoval krácení zlomků: $\frac{a \cdot}{b \cdot c} =$

$$\frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

Př. 7: Zapiš pravidlo pro rozšíření zlomku $\frac{k}{l}$ číslem m .

$$\frac{k}{l} = \frac{k \cdot m}{l \cdot m} = \frac{km}{lm}$$

Př. 8: Které číslo můžeme napsat místo písmene x ?

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{x} = 3$

b) $\frac{x}{15} \cdot \frac{10}{7} = \frac{8}{6}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{7}{6}$

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{x} = \frac{2 \cdot 3}{x} = 3 \Rightarrow x = 2$ (aby se obě dvojky vykrátily $\frac{2 \cdot 3}{x} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$)

b) $\frac{x}{15} \cdot \frac{10}{7} = \frac{x}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{x \cdot 2}{3 \cdot 7} \quad \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$$\frac{x \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 7}$$

$$x \cdot 2 = 28$$

$$x = 14$$

c) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{7}{6}$

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{x \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3 + 2x}{6} = \frac{7}{6}$$

$$3 + 2 \cdot x = 7$$

$$x = 2$$

Shrnutí: Pravidla pro počítání můžeme snadno zapisovat pomocí písmenek. Pokud si nevíme rady, pomůžeme nám, když si za písmenka dosadíme čísla.